C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 1353-1357, 1998
Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Liaisons unilatérales et chocs élastiques quelconques : un résultat d'existence

Mongi MABROUK

LMA, 24, rue de l'épitaphe, 25000 Besançon cedex, France
Courriel : mongi.mabrouk@univ-fcomte.fr

(Reçu le 9 janvier 1998, accepté après révision le 25 mai 1998)

Résumé. Suivant J.J. Moreau [5], nous présentons un modèle variationnel unifié qui décrit l'évolution d'un système mécanique ayant un nombre fini de degrés de liberté, soumis à des liaisons unilatérales parfaites et subissant des chocs de coefficient de restitution quelconque. Dans le cas d'une seule contrainte $f(q) \leq 0$, nous montrons un résultat d'existence sous la condition que f est de classe $C^{1,\beta}$, avec $\beta > 1/2$. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Unilateral constraints and arbitrary elastic shocks: an existence result

Abstract. *Following J.J. Moreau [5], we present a unified variational model, which governs the evolution of a mechanical system having a finite number of degrees of freedom, submitted to some perfect unilateral constraints, and experiencing shocks with arbitrary restitution coefficient. In the case of one single constraint $f(q) \leq 0$, we prove an existence result, under the assumption that f is of class $C^{1,\beta}$, with $\beta > 1/2$.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

We consider a mechanical system with a finite number of degrees of freedom, having a configurations manifold Q and a local coordinates system $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$. Besides the bilateral constraints which have been used for the parametrization of Q, we consider a single *perfect unilateral constraint* $f(q) \leq 0$, where f is at least C^1, with $\nabla f \neq 0$ in a neighborhood of the hypersurface $f(q) = 0$ delimiting the closed domain $L \subset Q$. Let $E(q)$ (resp. $E'(q)$) be the tangent (resp. cotangent) space at q. To avoid unnecessary complications, we suppose that the kinetic energy reduces to $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2$ which makes Q, at least locally, an open subset of $\mathbb{R}^N$ and $E(q) = E'(q) = \mathbb{R}^N$. For every q, let $V(q) = \{w \in E : w \cdot \nabla f(q) \leq 0\}$ if $f(q) \geq 0$, and $V(q) = E$ if $f(q) < 0$, which is the tangent cone to L at q if $q \in L$. Here $V(q)$ is either $\mathbb{R}^N$ or a half-space. Let $N(q)$ be the polar cone

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

of $V(q)$. The system is submitted to some continuous given forces $p(t,q(t)) \in E'(q)$ and to an unknown constraint force $R = -\lambda \nabla f(q)$, $\lambda \geq 0$ constant. Let $I = [0,T] \subset \mathbb{R}$. Then a *generalized motion* is a locally absolutly continuous map $q : I \longrightarrow Q$ such that: i) the right and left velocities $\dot{q}^{\pm}$ exist everywhere, ii) on every subinterval of smooth motion we have: $p - \ddot{q} \in \partial I_{V(q)}(\dot{q})$ a.e., iii) if at an instant t_s, we have $\dot{q}^-(t_s) \neq \dot{q}^+(t_s)$, then a shock occurs and we have the jump relation: $\frac{1}{1+e}(\dot{q}^+ + e\dot{q}^-) = \mathrm{prox}(V(q), \dot{q}^-)$, $\mathrm{prox}(C,x)$ being the proximal point to x in the convex set C.

DEFINITION. – A function u, locally of bounded variation on I is said to be *e-averaged*, and denoted lbv$e$-m, if and only $u = \dfrac{u^+ + eu^-}{1+e}$ everywhere.

We can then state our problem:

PROBLEM $\mathcal{P}$. – Let $q_0 \in L$, $v_0 \in E$. To find u in lbv$e$-m(I,Q) with $u^-(0) = v_0$ such that with $q(t) = q_0 + \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ we have the following differential equation for real measures: $p(t,q(t))\mathrm{d}t - \mathrm{d}u \in \partial I_{V(q(t))}(u(t))$.

From [1], we know that every solution u of Problem $\mathcal{P}$ is a generalized motion. In the present work, we prove the following existence result by using the numerical scheme (6)–(9).

THEOREM. – *Assume* $f \in C^{1,\beta}(Q,\mathbb{R})$, $\beta > 1/2$. *Then:*

(i) *from the sequence* (v_n, q_n) *of the numerical sheme, we can extract a subsequence which converges to a limit* (v,q) *where* v *is of bounded variation and* $q(t) = q_0 + \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$;

(ii) *the function* $u = \dfrac{v^+ + ev^-}{1+e}$ *is a solution of Problem* $\mathcal{P}$.

The above result remains true if we assume that p depends also on $\dot{q}$ (viscous damping for example) and is uniformly Lipshitzian in q and $\dot{q}$.

1. Présentation

Dans ce travail, nous exposons et étudions un modèle variationnel unifié qui gouverne la dynamique des systèmes mécaniques à un nombre fini de degrés de liberté, soumis à des liaisons unilatérales parfaites. Ce modèle déjà mentionné par J.J. Moreau dans [5], s'applique en présence de chocs de nature quelconque, généralisant ainsi le cas du choc inélastique standard étudié initialement par J.J. Moreau [4]. Plus précisément, considérons un système mécanique à N degrés de liberté. Soit Q la variété des configurations et $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ un système de coordonnées locales. En plus des liaisons bilatérales qui ont servi à choisir la paramétrisation, on suppose le système soumis à une *liaison unilatérale parfaite*, d'équation :

$$f(q) \leq 0, \tag{1}$$

où f est supposée de classe C^1 au moins, de gradient non nul au voisinage de l'hypersurface $f(q) = 0$ délimitant la région fermée régulière $L \subset Q$. Soit $E(q)$ (resp. $E'(q)$) l'espace tangent (resp. cotangent) en q à Q. Afin d'éviter les complications purement techniques, nous supposons que l'énergie cinétique du système se réduit à $T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|_E^2$, i.e. Q est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $E(q) = E'(q) = \mathbb{R}^N$.

Soit $V(q) = \{w \in E : w \cdot \nabla f(q) \leq 0\}$ si $f(q) \geq 0$, et $V(q) = E$ si $f(q) < 0$, appelé cône tangent à L au point q si $q \in L$. Ici $V(q)$ est soit l'espace entier, soit un demi-espace, et la condition de qualification $\mathrm{Int}V(q) \neq \emptyset$ est satisfaite pour tout q. Soit $N(q) := \{r \in E : r \cdot w \leq 0,\ \forall w \in V(q)\}$ le cône polaire à $V(q)$. Dans notre cas, $N(q)$ est la normale sortante à L si $f(q) = 0$, et $\{0\}$ si

$f(q) < 0$. Si le mobile $t \longmapsto q(t)$, décrivant l'évolution du système, reste dans la région L, on a : $v^+ \cdot \nabla f(q) \leq 0$, où $v^+ = \dot{q}^+$ est la vitesse à droite de q supposée exister. Autrement dit, $v^+ \in V(q)$. On montre de même que si la vitesse à gauche v^- existe, on a $v^- \in -V(q)$. Du point de vue de la dynamique, le système est soumis à des efforts donnés $p(t, q(t)) \in E'(q)$ continus et à des efforts de liaison représentés par le covecteur $R = -\lambda \nabla f(q)$, λ constante positive. Le mouvement $q : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q$, où I est un intervalle ouvert, est dit *régulier* si et seulement si q est différentiable, et $\dot{q}$ est localement absolument continue. Si I est un intervalle de mouvement régulier, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$p - \ddot{q} \in \partial I_{V(q)}(\dot{q}) = N_{V(q)}(\dot{q}) \quad \text{p.p.} \tag{2}$$

où I_C est ici la fonction indicatrice du convexe C, égale à 0 sur C et $+\infty$ sinon, et $\partial I_C(u)$ est son sous-différentiel au point u.

Si un intervalle de mouvement régulier se termine à t_s avec $\dot{q}^-(t_s) \notin V(q(t_s))$, on a nécessairement un choc. Notons $\pi = \dot{q}^+(t_s) - \dot{q}^-(t_s)$ la percussion de liaison.

DÉFINITION 1. – Soit $0 \leq e \leq 1$. Un choc à l'instant t_s est dit *élastique de coefficient de restitution* e (*inélastique standard* si $e = 0$) si et seulement si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes a lieu : (i) $\dfrac{1}{1+e}(\dot{q}^+ + e\dot{q}^-) = \operatorname{prox}(V(q), \dot{q}^-)$, (ii) $-\frac{\pi}{1+e} = \operatorname{prox}(N(q), \dot{q}^-)$, (iii) $\frac{\pi}{1+e} \cdot (\dot{q}^+ + e\dot{q}^-) = 0$ ou (iv) $\dfrac{1}{2}\|\dot{q}^+\|_E^2 - \dfrac{1}{2}\|\dot{q}^-\|_E^2 = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1-e}{1+e}\|\dot{q}^+ - \dot{q}^-\|_E^2$, avec $\operatorname{prox}(C, x)$ désignant le point proximal de x dans le convexe fermé C.

Pour $e = 0$, on retrouve le choc inélastique (ou mou) étudié par J.J. Moreau [4] et P. Monteiro-Marques [2]. Suivant J.J. Moreau, nous appellerons *mouvement généralisé* toute application $q : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q$, localement absolument continue, ayant des dérivées à droite et à gauche $\dot{q}^\pm$ *en tout point*, vérifiant les équations du mouvement régulier sur tout sous-intervalle $I' \subset I$ où la dérivée $\dot{q}$ existe et est localement absolument continue, et vérifiant en tout point de discontinuité t_s les conditions de choc.

DÉFINITION 2. – Une fonction u, localement à variation bornée sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, est dite *e-moyennée*, et sera notée lvbe-m, si et seulement si $u = \dfrac{u^+ + eu^-}{1+e}$ en tout point de I.

On se pose alors le problème suivant :

PROBLÈME $\mathcal{P}$. – Soient $q_0 \in L$ et $v_0 \in E$. Trouver $u \in \text{lvbe-m}(I, E)$, avec $u^-(0) = v_0$, de telle sorte qu'en posant $q(t) = q_0 + \int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau$, on ait l'inclusion différentielle au sens des mesures réelles :

$$p(t, q(t))\mathrm{d}t - \mathrm{d}u \in \partial I_{V(q(t))}(u(t)) \tag{3}$$

On montre alors (*voir* [1]) que toute solution du problème $\mathcal{P}$ est un mouvement généralisé vérifiant une forme généralisée du théorème de l'énergie cinétique : $\forall t \in I : u(t) \cdot (p(t, q(t))t'_\mu(t) - u'_\mu(t)) = 0$, et est dissipative dans le sens : $\forall t \in I$, $\|u^+(t)\| \leq \|u^-(t)\|$. Dans ce travail, nous étudions la question de l'existence de solutions pour le problème $\mathcal{P}$. Pour cela, nous employons une technique de discrétisation analogue à celle utilisée par P. Monteiro-Marques dans [2]. Le résultat principal de cette Note est un théorème d'existence :

THÉORÈME. – *Supposons $f \in C^{1,\beta}(Q, \mathbb{R})$, avec $\beta > 1/2$. Alors :*

(i) *de la suite (v_n, q_n) du schéma numérique* (6)–(9), *on peut extraire une sous-suite convergeant vers une limite (v, q) où v est une fonction à variation bornée sur $[0, T]$ et $q(t) = q_0 + \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$;*

(ii) *la fonction $u = \dfrac{u^+ + eu^-}{1+e}$ est une solution du problème $\mathcal{P}$.*

2. Démonstration du théorème

Nous discrétisons la relation (3) sous la forme implicite :

$$\frac{t_{i+1}-t_i}{1+e}p(t_{i+1},q(t_{i+1}))-\frac{v_{i+1}-v_i}{1+e}\in\partial I_{V(q(t_{i+1}))}\Big(\frac{v_{i+1}+ev_i}{1+e}\Big), \tag{4}$$

équivalente à :

$$\frac{v_{i+1}+ev_i}{1+e}=\operatorname{prox}\Big(V(q(t_{i+1})),v_i+\frac{t_{i+1}-t_i}{1+e}\,p(t_{i+1},q(t_{i+1}))\Big) \tag{5}$$

Nous allons esquisser la preuve de l'existence d'une solution locale, l'existence globale s'en déduisant facilement à partir des estimations a priori uniformes obtenues.

Soit $I'=[0,T']$ un sous-intervalle de $I=[0,T]$ à déterminer. On adopte un pas constant $h=\frac{T'}{n}$, donc les nœuds $t_i^n=ih=i\frac{T'}{n}$, en particulier $t_0^n=0$, $t_n^n=T'$. Soit v_0 donné appartenant à E. Pour chaque n, on construit les suites approximantes finies (v_i^n) et (q_i^n) de E :

$$q_0^n=q_0, \tag{6}$$

$$v_0^n=-ev_0+(1+e)\operatorname{prox}\Big(V(q_0^n),v_0+\frac{h}{1+e}p(t_0^n,q_0^n)\Big), \tag{7}$$

et pour $i=0,1,\ldots,n-1$:

$$q_{i+1}^n=q_i^n+hv_i^n, \tag{8}$$

$$v_{i+1}^n=-ev_i^n+(1+e)prox\Big(V(q_{i+1}^n),v_i+\frac{h}{1+e}p(t_{i+1}^n,q_{i+1}^n)\Big). \tag{9}$$

On définit alors les fonctions en escalier approchantes :

$$\begin{cases} v_n(t)=v_i^n & \text{si } t\in[t_i^n,t_{i+1}^n[,\ \ 0\le i\le n-1,\\ \qquad\ \ =v_n^n & \text{si } t=T'.\end{cases}$$

et
$$q_n(t)=q_0+\int_0^t v_n(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Étape 1. – On montre la majoration

$$|v_i^n|\le R=|v_0|+2T'M,$$

où $M=\sup\{p(t,q(t)):t\in[0,T],\ |q(t)-q_0|\le\delta\}$. L'application $q\longmapsto V(q)$ étant semi-continue inférieurement, il existe $\delta>0$ et une boule $\mathrm{B}(a,r)$ tels que : $V(q)\supset\mathrm{B}(a,r)$ pour $|q-q_0|\le\delta$. On choisit alors T' par l'équation $T'=\frac{\delta}{R}$, d'où : $|q_i^n-q_0|\le\delta$ et $V(q_i^n)\supset\mathrm{B}(a,r)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall i\in\{0,\ldots,n-1\}$.

Étape 2. – Si $f\in\mathrm{C}^{1,1/2}(Q,\mathbb{R})$, on a la majoration des mesures $\mathrm{d}v_n$:

$$\sup_n\int_{[0,T']}|\mathrm{d}v_n|<+\infty.$$

Par le théorème de Helly, la suite (v_n) converge partout vers une fonction à variation bornée v. La suite (q_n) converge alors uniformément vers la fonction $t \longmapsto q(t) = q_0 + \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$ et vérifie la relation $f(q(t)) \leq 0$.

Soit alors $u = \dfrac{v^+ + ev^-}{1+e}$. Par construction, u est lbv$e$-m.

Étape 3. – Si $f \in \mathrm{C}^{1,1/2}(Q, R)$, on montre que u vérifie presque partout l'équation (2). Ceci se fait en démontrant la relation intégrale :

$$z \cdot (v(t) - v(s)) \geq \frac{1}{2}(|v(t)|^2 - |v(s)|^2) + \int_s^t (z - v(\tau)) \cdot p(\tau, q(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{10}$$

où $z \in V(y)$ pour tout y appartenant à un voisinage de l'image $q([s,t])$, $s \leq t \leq T'$, et en passant à la limite par le théorème de Jeffery sur la dérivation des mesures.

Étape 4. – Si $f \in \mathrm{C}^{1,\beta}(Q, \mathbb{R})$, $\beta > 1/2$, on montre que u vérifie la relation de saut en tout point de discontinuité.

3. Conclusion

Les preuves des points sus-mentionnés sont très techniques et reposent sur des arguments analogues à ceux utilisés dans [2]. Le fait que e soit non nul complique très sérieusement les démonstrations et nécessite plus de régularité pour f. Ceci peut s'interpréter comme une condition sur la courbure de la surface $f = 0$.

Pour $e = 0$ et $p = p(t, q(t))$, la condition $f \in \mathrm{C}^1(Q, \mathbb{R})$ suffit, et nous retrouvons le résultat d'existence établi par M. Monteiro-Marques dans [2].

Si le système est soumis à des efforts dépendant aussi de la vitesse (amortissement visqueux par exemple) $p = p(t, q(t), \dot{q}(t))$, globalement continus, et lipschitziens par rapport à q et $\dot{q}$, uniformément en t, le résultat d'existence demeure vrai. Seule l'étape 1 est à modifier substantiellement, les étapes 2, 3 et 4 ne subissant que des changements mineurs.

Les preuves détaillées de cette Note sont à paraître prochainement dans [1].

Références bibliographiques

[1] Mabrouk M., On an unified variational model for the dynamics of unilateral constraints, Europ. J. Mech., (à paraître).

[2] Monteiro-Marques M.D.P., Chocs inélastiques standard : un résultat d'existence, Séminaire d'analyse convexe de Montpellier, exposé n° 4, 1985.

[3] Moreau J.J., Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires, C. R. Acad. Sci. Paris t. 255 (1962).

[4] Moreau J.J., Standard inelastic shocks and the dynamics of Unilateral constraints, In: Unilateral Problems in structural Analysis, Del Piero G., Maceri F. (Eds.), 1985.

[5] Moreau J.J., Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, Moreau J.J., Panagiotopoulos P.D. (Eds.), Nonsmooth mechanics and applications, Springer-Verlag, 1988, pp. 1–82.