Mécanique du Point Matériel

Equipe Pédagogique[1]

[1] Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année universitaire 2013/2014

Chapitre V : Système de deux points matériels

Chapitre V: Système de deux points matériels

Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'étude des chocs, que l'on appelle aussi des collisions, entre deux particules qui seront considérées comme des point matériels.
Nous considérerons que les deux particules forment un système isolé et ne sont soumises qu'aux forces internes qu'elles subissent mutuellement.

Lors d'un choc, on distingue trois phases :
- Etat initial : les points matériels ont un mouvement rectiligne uniforme $\Longrightarrow$ Vitesses initiales constantes.
- Phase d'interaction : les interactions mutuelles ne sont plus négligeables $\Longrightarrow$ ne fait pas l'objet de ce cours.
- Etat final : les points matériels ont de nouveau un mouvement rectiligne uniforme $\Longrightarrow$ Vitesses finales constantes.

Définition

Lors d'un choc, les points matériels ont un mouvement réctiligne uniforme à l'état initial et à l'état final. Leurs vitesses sont respectivement constantes dans les deux états.

Chapitre V: Système de deux points matériels

Loi de conservation de la quantité de mouvement

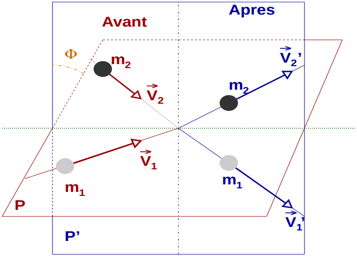
Quelques notations

$\mathcal{R}$ un référentiel galiléen. Considérons deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 et de vitesses par rapport à $\mathcal{R}$ à l'état initial respectivement $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

Les vitesses de M_1 et de M_2 dans $\mathcal{R}$ à l'état final, après le choc, sont respectivement $\vec{V}\,'_1$ et $\vec{V}\,'_2$.

Notons que les vitesses initiales et finales appartiennent en général à deux plans différents.

Soient $\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1$, $\vec{P}_2 = m_2\vec{V}_2$, $\vec{P}\,'_1 = m_1\vec{V}\,'_1$ et $\vec{P}\,'_2 = m_2\vec{V}\,'_2$ les quantités de mouvement respectivement à l'état initial et à l'état final de M_1 et de M_2.



Loi de conservation de la quantité de mouvement

Suite ...

Les deux points matériels forment un système isolé. L'application du PFD dans $\mathcal{R}$ donne

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{2} \vec{P}_i = \overrightarrow{Cste}.}$$

La quantité de mouvement totale du système formé par les deux point matériels M_1 et M_2 est conservée au cours du choc. On en conclut qu'elle a la même valeur avant et après le choc

$$\boxed{\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2}$$

Rappelons que l'objectif est de déterminer les vitesses de l'état final $\Longrightarrow$ Six inconnues, chacune des vitesses a trois composantes.
$\Longrightarrow$On ne peut résoudre le problème que dans des conditions particulières qui fixent les trois équations qui manquent.

Chapitre V: Système de deux points matériels

Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

Un mot sur les forces internes

Le système formé par les deux points matériels est isolé, l'énergie mécanique de l'état initial et celle de l'état final sont réduites respectivement aux énergies cinétiques dans les deux états.
E_{c1} et E_{c2} les énergies cinétiques à l'état initial respectivement de M_1 et de M_2 et E'_{c1} et E'_{c1} à l'état final. E_m et E'_m les énergies mécaniques de l'état initial et de l'état final. Alors

$$\boxed{E_m = E_{c1} + E_{c2} \text{ et } E'_m = E'_{c1} + E'_{c2}.}$$

Si les forces internes sont conservatives $\Longrightarrow$ E_m est conservée d'où

$$\boxed{\begin{array}{c} E_m = Cte \Longrightarrow E_m = E'_m \text{ et donc} \\ E_{c1} + E_{c2} = E'_{c1} + E'_{c2}. \end{array}}$$

$\Longrightarrow$ E_c est conservée.
Si les forces internes sont dissipatives $\Longrightarrow$ E_c n'est pas conservée.

Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

Choc élastique

Définition

Un choc est dit élastique si l'énergie cinétique est conservée au cours du choc.

Relations entre les vitesses

A partir de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement et de celle de l'énergie cinétique, nous avons

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 & = & m_1\vec{V}\,'_1 + m_2\vec{V}\,'_2 \\ \frac{1}{2}m_1{V_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{V_2}^2 & = & \frac{1}{2}m_1{V\,'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{V\,'_2}^2 \end{array}\right.$$

Six inconnues $\{V'_{ix}, V'_{iy}, V'_{iz}, i = 1, 2\}$ et seulement Quatre équations $\Longrightarrow$ Considérer des cas particuliers.

Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

Choc élastique

Cas où M_1 et M_2 identiques et M_2 au repos dans $\mathcal{R}$

les équations précédentes deviennent en prenant $m_1 = m_2$ et $V_2 = 0$

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{V}\,'_1 + \vec{V}\,'_2 \\ V_1^{\,2} = V\,'^{\,2}_1 + V\,'^{\,2}_2 . \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\vec{V}_1$, $\vec{V}\,'_1$ et $\vec{V}\,'_2$ forment un triangle rectangle, étant donnée que la deuxième équation n'est d'autre que la relation de pythagore $\Longrightarrow \vec{V}'_1 \perp \vec{V}'_2 \longrightarrow$ 5$^{\text{ème}}$ équation.

Il nous faut une donnée supplémentaire pour résoudre le problème : On donne $\theta_1 = \left(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}'_1}\right)$

Les solutions seront paramétrées par θ_1 :

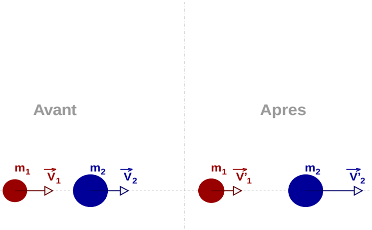
$$\begin{aligned} \vec{V}\,'_1 &= \cos\theta_1 \vec{V}_1 \\ \vec{V}\,'_2 &= \sin\theta_1 \vec{V}_1 . \end{aligned}$$

Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

Choc élastique

Cas d'un choc direct

Un choc direct est un choc dans lequel les vitesses de l'état initial et de l'état final sont colinéaires. Le système d'équations dans ce cas devient



$$\begin{cases} m_1\left(V_1 - V'_1\right) & = & -m_2\left(V_2 - V'_2\right) \\ m_1\left(V_1 - V'_1\right)\left(V_1 + V'_1\right) & = & -m_2\left(V_2 - V'_2\right)\left(V_2 + V'_2\right) \end{cases}$$

ce qui donne $V_1 + V'_1 = V_2 + V'_2$, et en substituant V'_2 dans la première équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} V'_1 &= \frac{2m_2V_2 + (m_1 - m_2)\,V_1}{m_1 + m_2} \\ V'_2 &= \frac{2m_1V_1 + (m_2 - m_1)\,V_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

Choc élastique

Cas d'un choc direct

Remarques

- **Si $m_1 = m_2$ alors $V'_1 = V_1$ et $V'_2 = V_2$. Les points matériels gardent les mêmes vitesses après le choc.**
- **Si $V_2 = 0$, M_2 est au repos dans l'état initial, alors**

$$\begin{aligned} V'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)\,V_1}{m_1 + m_2} \\ V'_2 &= \frac{2m_1V_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

- **Si $m_1 \ll m_2$, alors**

$$\begin{aligned} V'_1 &\simeq \frac{2m_2V_2 + -m_2V_1}{m_2} = 2V_2 - V_1 \\ V'_2 &\simeq V_2. \end{aligned}$$

- **Dans le cas d'un choc frontal, il suffit de substituer V_2 par $-V_2$.**

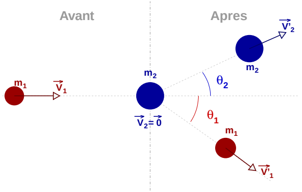
Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

Choc élastique

Cas où M_2 est immobile : $\vec{V}_2 = \vec{0}$.

Le choc a lieu dans ce cas dans le même plan. En projetant les vitesses et en utilisant la conservation de E_c,

$$\begin{aligned} m_1 V_1 &= m_1 V'_1 \cos\theta_1 + m_2 V'_2 \cos\theta_2 \\ m_1 V'_1 \sin\theta_1 &= m_2 V'_2 \sin\theta_2 \\ \frac{1}{2} m_1 {V_1}^2 &= \frac{1}{2} m_1 {V'_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {V'_2}^2. \end{aligned}$$



nous obtenons

$${m_1}^2 {V_1}^2 - 2 m_1^2 V_1 V'_1 \cos\theta_1 + {m_1}^2 {V'_1}^2 = m_1 m_2 \left({V_1}^2 - {V'_1}^2 \right)$$

ce qui donne l'équation de second ordre en V'_1

$${V'_1}^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) - 2 V_1 V'_1 \cos\theta_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) {V_1}^2 = 0$$

La solution sera donnée en fonction θ_1. Voir TD pour le détail.

Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

Choc inélastique

Définition

On dit qu'un choc est inélastique lorsqu'il y a dissipation de l'énergie au cours de la phase d'interaction.

$\Longrightarrow$ E_c **n'est pas conservée.**

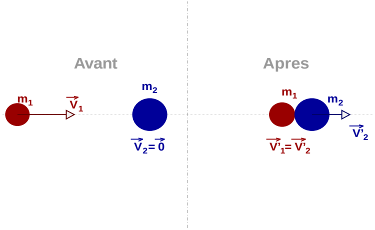
Choc complétement inélastique(choc mou)

Un choc est totalement inélastique lorsque les points matériels ont la même vitesse finale $\vec{V}'_1 = \vec{V}'_2 = \vec{V}'$.

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}'$$

ce qui donne

$$\vec{V}' = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$



Si le point matériel M_2 est au repos, alors la vitesse finale $\vec{V}'$ devient

$$\vec{V}' = \frac{m_1\vec{V}_1}{m_1 + m_2}.$$

Chapitre V: Système de deux points matériels

Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

Centre de masse G

Définition

Le centre de masse G des points matériels M_1 et M_2 est défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2}}$$

où $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OM}_1$ et $\overrightarrow{OM}_2$ sont les vecteurs position respectivement de G, M_1 et M_2.

Remarque

La définition peut être étendue à un nombre quelconque de points matériels sans difficulté.

Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

Référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

$\mathcal{R}_\mathcal{G}(G, GX, GY, GZ)$ **: d'origine G et dont les trois axes (GX), (GY) et (GZ) sont constamment parallèles respectivement aux axes (OX), (OY) et (OZ) du référéntiel $\mathcal{R}$**

Vitesse et accélération de G par rapport $\mathcal{R}$

$$\vec{V}_G = \vec{V}(G/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

$$\vec{\gamma}_G = \left.\frac{d\vec{V}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{1}{m_1 + m_2}\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = \vec{0}$$

Définition : **Le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ d'un système de points matériels est un référentiel dont l'origine est formée par le centre de masse G et dont les trois axes restent constamment parallèles à ceux du référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.**

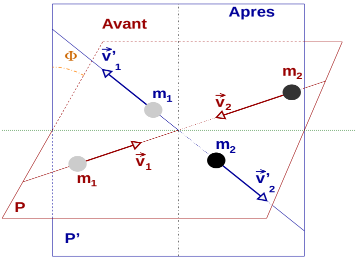
Remarque : $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ **est en translation uniforme par rapport à** $\mathcal{R}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ **est galiléen.**

Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

Lois de conservation dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

Vitesses dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$:

$$\vec{v}_i = \vec{V}_i - \vec{V}_G$$
$$\vec{v}'_i = \vec{V}'_i - \vec{V}_G \quad i = 1, 2.$$



Conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$:

$$\sum_{i=1,2} \left.\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right|_{\mathcal{R}_\mathcal{G}} = \vec{0} \Longrightarrow \sum_{i=1,2} \vec{p}_i = \overrightarrow{Ct}$$

En appliquant la loi de composition des vitesses, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1,2} \vec{p}_i &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\
&= m_1\left(\vec{V}_1 - \vec{V}_G\right) + m_2\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_G\right) \\
&= m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 - (m_1 + m_2)\,\vec{V}_G
\end{aligned}$$

Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

Lois de conservation dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

En utilisant l'expression de $\vec{V}_G = \left(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2\right) / (m_1 + m_2)$, nous aboutissons à

$$\boxed{\sum_{i=1,2} \vec{p}_i = \vec{0}.}$$

Remarques

- **La quantité de mouvement totale est conservée et nulle dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$**

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0} = m_1\vec{v}\,'_1 + m_2\vec{v}\,'_2.$$

- **A partir des relations précédentes, on déduit**

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad \textbf{et} \quad \vec{p}\,'_1 = -\vec{p}\,'_2 \Longrightarrow (\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \pi \ \textbf{et} \ (\widehat{\vec{v}\,'_1, \vec{v}\,'_2}) = \pi$$

Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

Energie cinétique $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

En substituant dans l'expression de l'énergie cinétique les vitesses dans $\mathcal{R}$ en fonction de celles dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1{V_1}^2+\frac{1}{2}m_2{V_2}^2 &= \frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1+\vec{V}_G\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_2+\vec{V}_G\right)\\
&= \frac{1}{2}m_1{v_1}^2+m_1\vec{v}_1\cdot\vec{V}_G+\frac{1}{2}m_1\vec{V}_G^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2+m_2\vec{v}_2\cdot\vec{V}_G+\frac{1}{2}m_2\vec{V}_G^2\\
&= \frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\vec{V}_G^2+\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2\right)\cdot\vec{V}_G
\end{aligned}$$

or $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\vec{0}$**, alors**

$$\frac{1}{2}m_1{V_1}^2+\frac{1}{2}m_2{V_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\vec{V}_G^2.$$

On en conclut que l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ est donnée par

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2=\frac{1}{2}m_1{V_1}^2+\frac{1}{2}m_2{V_2}^2-\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\vec{V}_G^2.}$$

Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

Energie cinétique $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

Réexprimons l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$, en utilisant la propriété $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = -\vec{p}$

$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p^2}{2\mu}.$$

avec $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ appelée la masse réduite.

On pose $\vec{p} = \mu\vec{v}$ et on montre que (voir polycopié du cours)

$$\vec{v} = \vec{V}_G + \vec{v}_2 = \vec{V}_G + \vec{v}_2 - \left(\vec{V}_G + \vec{v}_1\right) = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

On en conclut que l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ est égale à celle d'une particule "fictive" de masse μ et de vitesse dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ égale à $\vec{v} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$:

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \frac{1}{2}\mu v^2.}$$

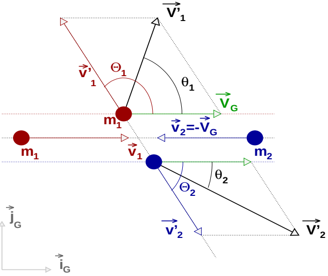
Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

Choc élastique

Nous traitons le cas où M_2 est immobile dans $\mathcal{R}$ c'est à dire $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_G = -\vec{V}_G$,

Conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 & = & \vec{0} \\ \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 & = & \vec{0} \\ \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 & = & \frac{1}{2} m_1 {v\,'_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v\,'_2}^2 \end{array} \right.$$



Nous utiliserons Θ_1 comme donnée suplémentaire et obtenons (voir polycopié du cours)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{v}'_1 & = & \frac{m_2}{m_1} V_G \left(\cos\Theta_1 \vec{i}_G + \sin\Theta_1 \vec{j}_G \right) \\ \vec{v}'_2 & = & V_G \left(\cos\Theta_2 \vec{i}_G + \sin\Theta_2 \vec{j}_G \right) = V_G \left(-\cos\Theta_1 \vec{i}_G + \sin\Theta_1 \vec{j}_G \right) \end{array} \right.$$